Bigbangprofe: Cálculo 1 UNI (Cachimbos)

Semana 1

PREGUNTA 1

Calcule el dominio y grafique la función:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sgn}(x-4)}{\sqrt{\operatorname{sgn}([\![x-2]\!]) - \sqrt{[\![|x-1|-3]\!]}}} + \log_{[\![x-2]\!]}|x|$$

PREGUNTA 2

Dada las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} |x-6| & ;\ x < -2 \\ [\![2^{x-1}]\!] & ;x \in \langle -1; 3] \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -x-1 & ;\ x \in \langle -2; 2\rangle \\ \operatorname{sgn}\left(\dfrac{2x-6}{x+4}\right) & ;\ x \in \langle -\infty; -2] \cup [2; \infty] \end{cases}$$

Halle (si existe) el rango de la función $k = f + g$

PREGUNTA 3

Dada las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} & ;\ x \in [-5; -1] \\ \left[\!\!\left[\dfrac{2(x+1)}{x-1}\right]\!\!\right] & ;\ x \in \langle 0; 1\rangle \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x^2-16) & ;\ x \le 0 \\ \log_3(2^x - 1) & ;\ x > 1 \end{cases}$$

Halle (si existe) el rango de fog

1) Sean las funciones:

$$f(x) = \tfrac{1}{4}x^2 Sgn\left(\tfrac{x-5}{|x|-2}\right) + 2x \left\|\tfrac{x}{4}\right\| \quad \text{Donde } \left|\tfrac{x^2}{4} - 2\right| \le 2$$

$$g(x) = \begin{cases} [\![x]\!] & x \in [0,2> \\ \sqrt{x^2-4} & x \in [2,6> \end{cases}$$

Hallar $(f+g^2)_{(x)}$, trazar su gráfica indicando su rango.

2) Dadas las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x < 0 \\ \sqrt{x^2+16} & 0 \le x \le 3 \\ \frac{2}{x^2-4} & x > 3 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2+10x+21 & x \in [\sqrt{3}, 2] \\ \frac{|x-2|-1}{|x+3|} & x \in < 0,2] \end{cases}$$

Si se cumple que: $f^* = hog$, determinar si existe la función h. Justificar procedimiento.

3) Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4(|x+10|+|x+5|)}{x} & -10 \le x \le -5 \\ \dfrac{x^2-2x+5}{4} & -5 < x \le 1 \\ 1 - \sqrt{8+2x-x^2} & 1 < x \le 4 \end{cases}$$

Determinar si f es inyectiva. Si no lo es, restringir el dominio, lo menos posible, de modo que sea inyectiva. Luego, halle f^*.

1. Indique y justifique la veracidad (V) o falsedad (F) de cada una de las siguientes afirmaciones:

   a) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\cosh^2(3x) + \sinh^2(3x) = 1$ (1.5 ptos)

   b) Si $f(x) = \ln(x^2+x-1)$, entonces $dom(f) = <-\infty, \frac{1-1\sqrt{5}}{2}> \cup < \frac{1-1\sqrt{5}}{2}, \infty >$. (1pto)

   c) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $sgn(sgn(x)) = -sgn(x)$. (1pto)

   d) El inverso de $f(x) = 3^x$ es $g(x) = \log_3 x$. (1.5 ptos)

Falso $\cosh^2 3x - \operatorname{senh}^3 x = 1$

$x^2 + x - 1 > 0$ $\quad \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ Falso

$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$ Falso

verdadero Para $f(x)$ Dom $= \mathbb{R}$, Ran $= \langle 0, +\infty\rangle$; Dom $0 + \infty$, Ran $\mathbb{R}$

2. Dados (a, b) y (c, d) intervalos abiertos, con $b \le c$, y las funciones estrictamente crecientes $f_1 : (a, b) \to \mathbb{R}$ y $f_2 : (c, d) \to \mathbb{R}$. Considere la función $f : (a, b) \cup (c, d) \to exp(Ran(f_1)) \cup Ran(f_2)$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} (exp \circ f_1)(x), & \text{Si } x \in (a, b), \\ f_2(x) & \text{Si } x \in (c, d). \end{cases}$$

Muestre la siguiente proposición: f es monótona si y solo si para todo z_1, z_2 tales que $z_1 \in exp(Ran(f_1))$ y $z_2 \in Ran(f_2)$, se cumple que $z_1 \le z_2$. $(\Rightarrow)$ (5ptos)

• f es monótona .....

• $\forall z_1, z_2 / z_1 \in exp(Ran f_1)$, $z_2 \in exp(Ran f_2)$, $z_1 \le z_2$ .....

3. a) Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función impar y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función par, que satisfacen la siguiente ecuación:

$$x^{14} f(x) - x f(x^{13}) = g(x), \forall x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

(Impar, Par, Impar)

calcule $f^2(x) + g^2(x)$.

$x^{14} f(x) = x f(\ldots + g(x$ — Par

b) Sean $a, b > 0$, $\frac{a}{b} = p \in \mathbb{N}$, y f una función tal que

$$f(x) = \left((a-b)\cos x + b\cos\left(\frac{a-b}{b}x\right)\right) r(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

donde r es una función periódica de periodo $\frac{n}{m}\pi$, para $n, m \in \mathbb{N}$ primos entre si. Si T_p es el periodo de f y T_r el periodo de r, entonces pruebe que

$$E_p = \frac{T_p}{T_r}, p \ge 1.$$

Aquí

$$E_p = \begin{cases} 2m, & p > 1 \\ 1, & p = 1 \end{cases}$$

(5ptos)

Bigbangprofe

PREGUNTA 1

Calcule el dominio y grafique la función:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sgn}(x-4)}{\sqrt{\operatorname{sgn}([\![x-2]\!]) - \sqrt{[\![|x-1|-3]\!]}}} + \log_{[\![x-2]\!]}|x|$$

Solución: ⓪ ① ② 3 4 ...

$[\![|x-1|-3]\!] \geq 0$

$|x-1|-3 \geq 0 \Rightarrow |x-1| \geq 3$

$x \geq 4 \vee x \leq -2$

además $\operatorname{sgn}([\![x-2]\!]) - \sqrt{[\![|x-1|-3]\!]} > 0$

$0 \leq \sqrt{[\![|x-1|-3]\!]} < \operatorname{sgn}[\![x-2]\!]$ $\quad \operatorname{sgn}[\![x-2]\!] \neq 0$ $\quad$ luego $\operatorname{sgn}([\![x-2]\!]) = 1$

$[\![x-2]\!] > 0$

$0 \leq \sqrt{[\![|x-1|-3]\!]} < 1 \Rightarrow 0 \leq [\![|x-1|-3]\!] < 1$

$\Rightarrow [\![|x-1|-3]\!] = 0$, concluimos $x \geq 4$

$\Rightarrow [\![x-1-3]\!] = 0 \Rightarrow 0 \leq x-4 < 1$ $\quad$ $4 \leq x < 5$

Nota logaritmo $[\![x-2]\!] > 0$ $\quad x-2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 3$ $\quad [\![x-2]\!] \neq 1$ supongamos que <1

$1 \leq x-2 < 2$ $\quad 3 \leq x < 4$

PREGUNTA 1

Calcule el dominio y grafique la función:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sgn}(x-4)}{\sqrt{\operatorname{sgn}([\![x-2]\!]) - \sqrt{[\![|x-1|-3]\!]}}} + \log_{[\![x-2]\!]}|x|$$

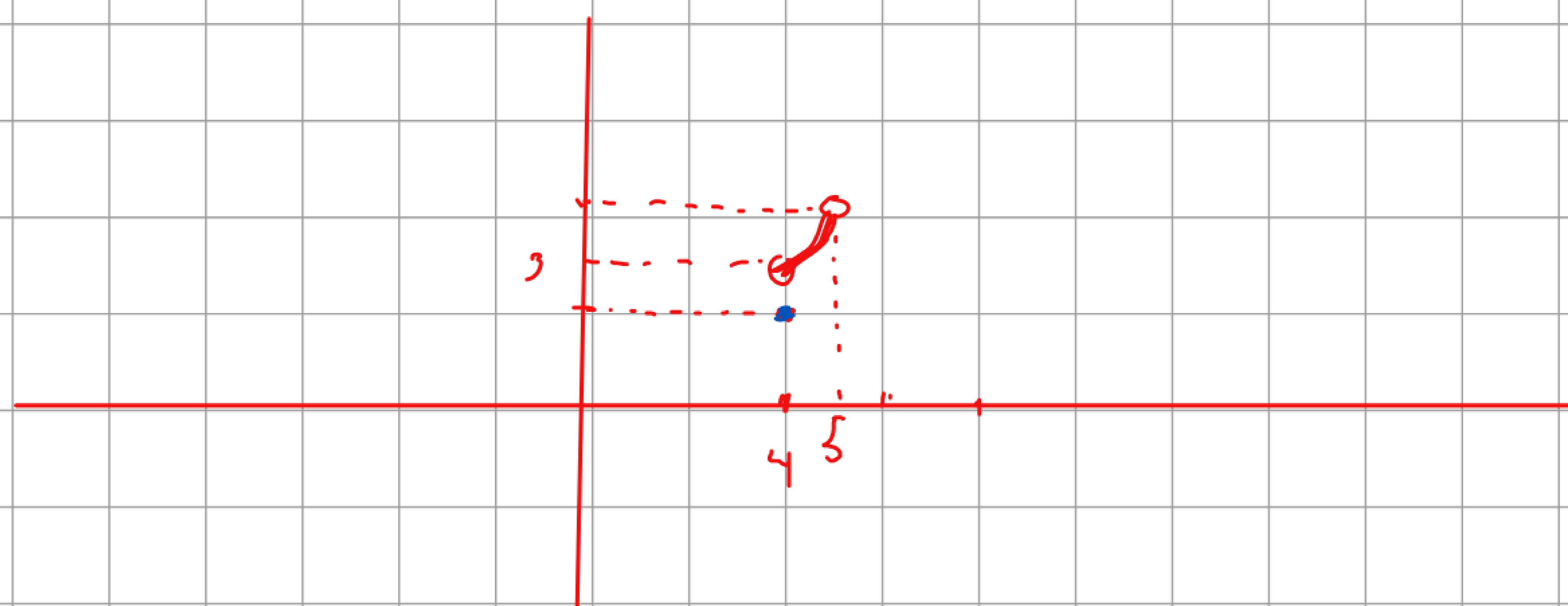
$\operatorname{Dom} f = [4, 5\rangle$

$x=4 \Rightarrow f(4) = 0 + \log_2 4 = 2$

$4 < x < 5 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{0}}} + \log_2 x = 1 + \log_2 x = \log_2 2x$

sgn ( )

máximo entero ⌊ ⌋



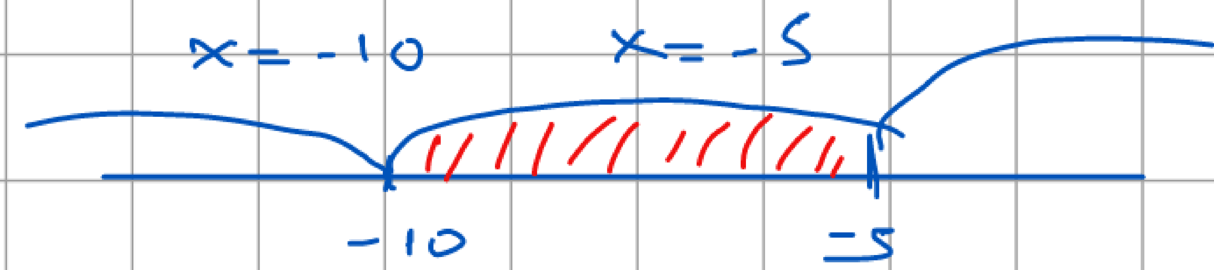
3) Sea la función:

$-7 \quad -7$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4(|x+10|+|x+5|)}{x} \quad f_1 & -10 \le x \le -5 \\ \dfrac{x^2-2x+5}{4} \quad f_2 & -5 < x \le 1 \\ 1-\sqrt{8+2x-x^2} \quad f_3 & 1 < x \le 4 \end{cases}$$

Determinar si f es inyectiva. Si no lo es, restringir el dominio, lo menos posible, de modo que sea inyectiva. Luego, halle f^*.

$f_1(x) = \dfrac{4(|x+10|+|x+5|)}{x}$



(II) : $-10 \le x < -5$ $\quad$ III $\boxed{x=-5}$

$\text{Ran } f_1 = [-4, -2]$

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{20}{x}, & -10 \le x < -5 \\ -4, & x = -5 \end{cases}$$

$g_1(x) = \dfrac{20}{x}$

$g_1(x_1) = g_1(x_2) = \dfrac{20}{x_1} = \dfrac{20}{x_2} = x_1 = x_2$

$\text{Ran } g_1 \cap \text{Ran } g_2 = \emptyset$ donde $g_2(x) = -4$ $\quad x = -5$

Para $f_2 := \dfrac{x^2-2x+5}{4} = \dfrac{(x-1)^2+4}{4}$ $\quad$ Si $f_2(x_1) = f_2(x_2) = \dfrac{(x_1-1)^2+4}{4} = \dfrac{(x_2-1)^2+4}{4}$

$|(x_1-1)| = |(x_2-1)|$, además, $-5 < x \le 1 \Rightarrow -6 < x \le 0$

$\Rightarrow -x_1+1 = -x_2+1 \Rightarrow x_1 = x_2$ $\quad$ $\text{Ran } f_2 = [1, 10)$

Para $f_3 = 1-\sqrt{8+2x-x^2}$ $\quad 1 < x \le 4$

$1-\sqrt{9-(x-1)^2}$

$1-\sqrt{9-(x_1-1)^2} = 1-\sqrt{9-(x_2-1)^2}$

$\Rightarrow |x_1-1| = |x_2-1|$ $\quad 0 < x-1 \le 3$ $\quad \text{Ran } f_3 = [-2, 1]$

$\Rightarrow x_1-1 = x_2-1 \Rightarrow x_1 = x_2$

$\text{Ran } f_1 = [-4, -2]$ $\quad \text{Ran } f_2 = [1, 10)$ $\quad \text{Ran } f_3 = [-2, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4(|x+10|+|x+5|)}{x} & -10 \le x \le -5 \\ \dfrac{x^2-2x+5}{4} & -5 < x \le 1 \\ 1-\sqrt{8+2x-x^2} & 1 < x < 4 \end{cases}$$

si es inyectiva

$$f^* = \begin{cases} \dfrac{20}{x} & x \in [4, -2] \\ -5 & x = -4 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

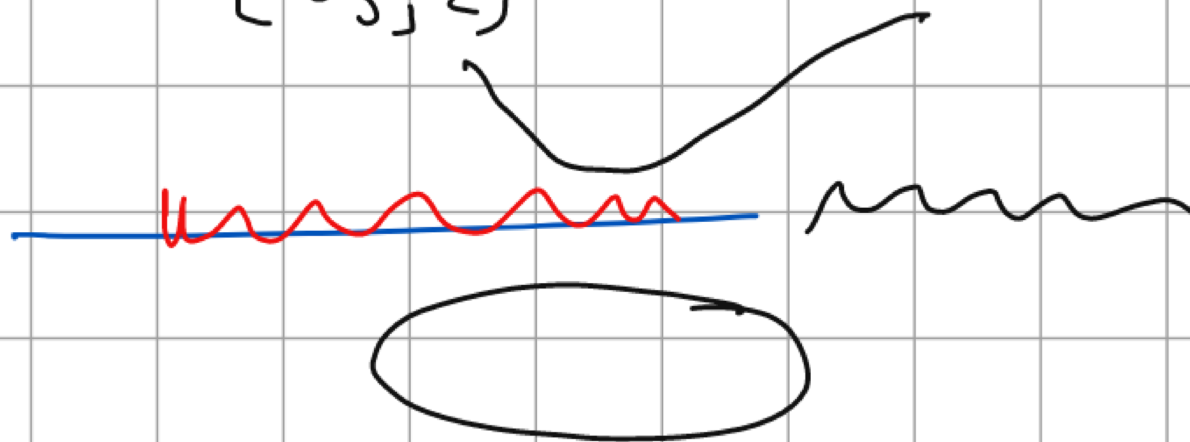
Idea

sol 2 $f^* = h \circ g$ => $\boxed{h}$

composición por $h(g(x))$

$x \in Dom\, g \wedge g(x) \in Dom\, h$ ←

$f^* = h(g(x))$



$Dom\, f^* = Ran\, f$

$h(g(x))$

$f(x)$

$f(x+2) = \frac{1}{x}$

$f(x+2) = \frac{1}{x+2-2}$

$f(x) = \frac{1}{x-2}$

$f(y) = \frac{1}{y-2}$

